Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (Nota MIM n. 9305 del 20 marzo 2023).

PROBLEMA 1

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = 2 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

a. Verificare che tutte le curve rappresentate dalle funzioni della famiglia $f_n(x)$ passano per uno stesso punto e scrivere le sue coordinate. Determinare, in funzione del parametro n, le ascisse degli estremi e dei flessi e calcolarne il limite, con $n \to \infty$. Scrivere le equazioni degli asintoti e tracciare i grafici delle funzioni f_n, evidenziando le differenze tra i casi in cui n è pari da quelli in cui n è dispari.

b. Si assuma $n = 3$, studiare la funzione $f_3(x)$ e si tracci un suo grafico rappresentativo, dimostrando che ammette un unico zero di segno negativo. Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f_3(x) = k$.

c. Si consideri la funzione $g(x) = 2 - \frac{3}{x}$ e verificare che, $\forall x > 0$, vale la disuguaglianza $f_n(x) > g(x)$, indipendentemente dal valore di n. Si consideri l'integrale

$$I(t) = \int_1^t (f_n(x) - g(x))dx,$$

che esprime l'area della regione delimitata dai grafici delle funzioni f_n e g e dalle rette di equazioni $x = 1$ e $x = t$, $t > 1$. Si calcolino $I(t)$ e il $\lim_{t \to +\infty} I(t)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

d. Calcolare il $\lim_{x \to \infty} \frac{f_n(x) - 2}{g(x) - 2}$

e verificare che il risultato non dipende da $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

PROBLEMA 2

Si considerino le famiglie di funzioni $f_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})$ e $g_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})$ con a parametro reale positivo.

a. Si traccino, al variare del parametro, i grafici rappresentativi γ_f e γ_g delle funzioni $f_a(x)$ e $g_a(x)$ evidenziando simmetrie, estremi e flessi.

b. Siano P e Q due punti, rispettivamente su γ_f e γ_g, aventi la stessa ascissa positiva, P' e Q' le loro proiezioni sull'asse delle ordinate. Si individui il valore del parametro a in corrispondenza del quale la massima area del rettangolo $PQQ'P'$ vale e^{-1}.

D'ora in avanti, si assuma $a = 1$.

c. Verificare l'identità $g^2(x) - f^2(x) = 1$ e determinare il numero intero per cui $50 \leq g(x) - f(x) \leq 100$. Specificare quale, tra $f(x)$ e $g(x)$, è una funzione invertibile in $\mathbb{R}$ e ricavare l'espressione analitica della funzione inversa.

d. Determinare l'equazione $y = P(x)$ della parabola γ avente il vertice nel punto di minimo assoluto della funzione $g(x)$ e retta tangente, per $x = 1$, parallela alla retta di equazione $2x + y = 0$. Calcolare l'area della regione finita R delimitata da γ, dal grafico di $g(x)$ e dalle rette di equazione $x = \pm 1$. Verificare che l'area di R può essere approssimata con quella del triangolo isoscele inscritto nel segmento parabolico delimitato da γ e dall'asse delle ascisse.

QUESTIONARIO

1 Nel triangolo ABC, l'ampiezza di uno dei tre angoli è la metà di un secondo angolo del triangolo ed è pari al triplo del terzo angolo. Detti A', B', C' i punti di tangenza tra i lati di ABC e il suo cerchio inscritto, determinare le ampiezze degli angoli del triangolo $A'B'C'$.

2 Una classe è formata da 18 studenti; durante la lezione di musica, vengono creati (in modo completamente casuale) tre gruppi formati rispettivamente da 5, 6 e 7 studenti. Se Alice, Barbara e Chiara sono tre studentesse della classe, determinare la probabilità che solo due di loro facciano parte di uno stesso gruppo.

3 Assegnate le rette $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$ con t parametro reale, determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a s.

4 Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata di diagonale fissata d, dimostrare che il cubo è quello di volume massimo.

5 Determina l'equazione della funzione dispari che ha un solo flesso a tangente orizzontale e la cui derivata seconda è $f'' = -10x^3 + 12x$.

6 Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ con $x \in [-2; 5]$, dove f è la funzione rappresentata in figura, ottenuta dall'unione di una semicirconferenza e due segmenti.

Calcolare $F(-2)$, $F(2)$, $F(3)$ ed $F(5)$.

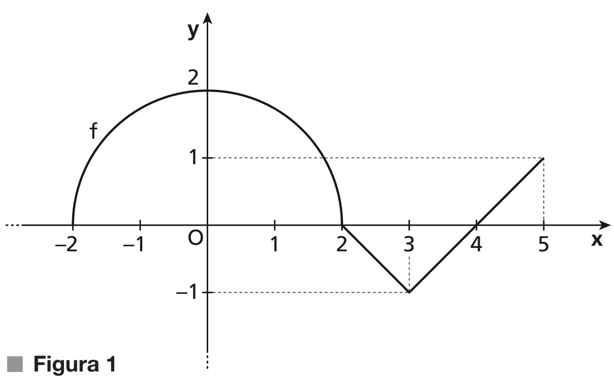


Figura 1

7 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{x|x+1|}{x^3 - x}$ e stabilire la tipologia delle sue discontinuità.

8 Si considerino le seguenti affermazioni sulla funzione $y = f(x)$.

A: "$f(x)$ è derivabile per $x = x_0$"

B: "$f(x)$ è continua per $x = x_0$"

Indicare quali, tra le seguenti affermazioni, non costituisce un teorema. Spiegare la scelta effettuata anche attraverso opportuni controesempi.

$A \Rightarrow B$ (Se A allora B)

$B \Rightarrow A$ (Se B allora A)

$A \Leftrightarrow B$ (B se e solo se A)

PROBLEMA 1

a. Detti $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m > 1$ e $n \neq m$, possiamo considerare nel dominio comune $x \neq 0$ le due funzioni $f_n(x)$ e $f_m(x)$ e intersecarle per determinare le coordinate del loro punto comune:

$$\begin{cases} y = 2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^n} \\ y = 2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^m} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^n} \\ 2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^n} = 2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^m} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^n} \\ \dfrac{3}{x^n} = \dfrac{3}{x^m} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^n} \\ x^{n-m} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Le coordinate del punto in comune sono (1; 2).

Per ricavare le ascisse dei punti estremi relativi di $f_n(x)$, calcoliamo la sua derivata prima:

$$f_n'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{3n}{x^{n-1}} = \frac{3(x^{n-1} - n)}{x^{n+1}}.$$

Se n è pari, gli esponenti $n - 1$ e $n + 1$ sono dispari e vi è un solo valore che annulla la derivata prima: $x = \sqrt[n-1]{n}$.

Analizzando il quadro dei segni a lato si deduce che c'è un punto di minimo relativo di ascissa $x = \sqrt[n-1]{n}$.

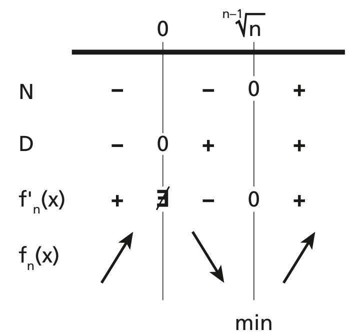


Figura 2

Se n è dispari, gli esponenti $n - 1$ e $n + 1$ sono pari e vi sono due valori che annullano la derivata prima: $x = \pm\sqrt[n-1]{n}$.

Analizzando il grafico dei segni a lato si deduce che vi è un punto di minimo relativo di ascissa $x = \sqrt[n-1]{n}$ e un punto di massimo relativo di ascissa $x = \sqrt[n-1]{n}$.

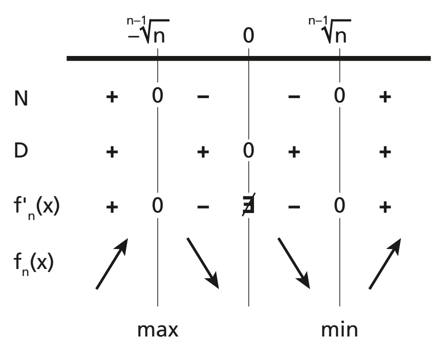


Figura 3

Per ricavare le ascisse dei punti di flesso di $f_n(x)$, calcoliamo la sua derivata seconda:

$$f_n''(x) = -\frac{6}{x^3} + \frac{3n(n+1)}{x^{n+2}} = \frac{3(n^2 + n - 2x^{n-1})}{x^{n+2}}.$$

Se n è pari, l'esponente $n-1$ è dispari per cui vi è un solo valore che annulla la derivata seconda: $x=\sqrt[n-1]{\frac{n^2+n}{2}}$ e l'esponente $n+2$ è pari. Analizzando il quadro dei segni a lato deduciamo che vi è un punto di flesso di ascissa $x=\sqrt[n-1]{\frac{n^2+n}{2}}$.

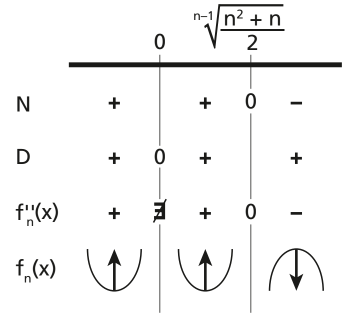


Figura 4

Se n è dispari, l'esponente $n-1$ è pari per cui vi sono due valori che annullano la derivata seconda: $x=\pm\sqrt[n-1]{\frac{n^2+n}{2}}$ e l'esponente $n+2$ è dispari. Analizzando il quadro dei segni a lato si deduce che vi sono due punti di flesso di ascisse $x=\pm\sqrt[n-1]{\frac{n^2+n}{2}}$.

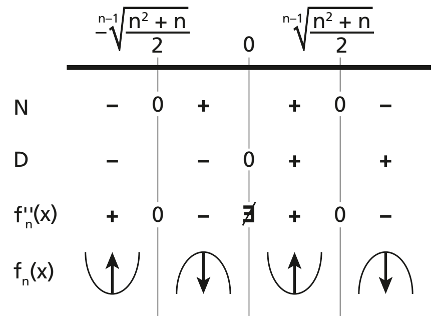


Figura 5

Per calcolare i limiti delle ascisse dei punti estremi e di flesso per $n\to+\infty$ ci possiamo limitare a quelle positive:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n-1]{n}=\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln n^{\frac{1}{n-1}}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln n}{n-1}}=1,$$

poiché l'esponente tende a 0 per la gerarchia degli infiniti;

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n-1]{\frac{n^2+n}{2}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(\frac{n^2+n}{2}\right)}{n-1}}=1,$$

poiché l'esponente tende a 0 per la gerarchia degli infiniti.

Le ascisse dei punti di estremo o di flesso negative, per $n\to+\infty$, tendono a -1.

Per determinare le equazioni degli asintoti calcoliamo i limiti:

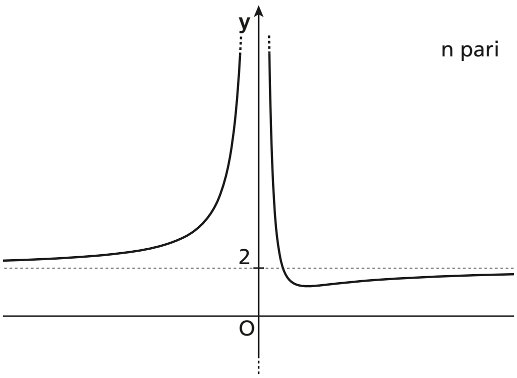
$$\lim_{x\to\pm\infty}f_n(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^n}\right)=2,$$

da cui si deduce che la retta $y=2$ è un asintoto orizzontale e non ci sono asintoti obliqui. Inoltre, calcoliamo anche:

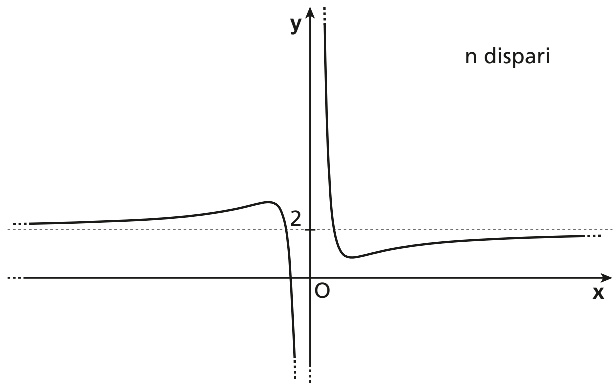
$$\lim_{x\to0^+}f_n(x)=\lim_{x\to0^+}\left(2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^n}\right)=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\longrightarrow0^-}f_n(x)=\lim_{x\longrightarrow0^-}\left(2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^n}\right)=\begin{cases}+\infty \text{ se } n \text{ è pari}\\-\infty \text{ se } n \text{ è dispari}\end{cases}$$

da cui si deduce che la retta $x=0$ è un asintoto verticale.

Da quanto analizzato, possiamo distinguere due casi per il grafico della funzione: se n è pari oppure se n è dispari.



■ **Figura 6**



■ **Figura 7**

b. Posto $n = 3$, che è un numero dispari, per lo studio della corrispondente funzione

$$y = f_3(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 3}{x^3}$$

utilizziamo i risultati già ricavati nel punto precedente.

Il suo dominio è $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

Per la determinazione degli zeri, risolviamo il sistema:

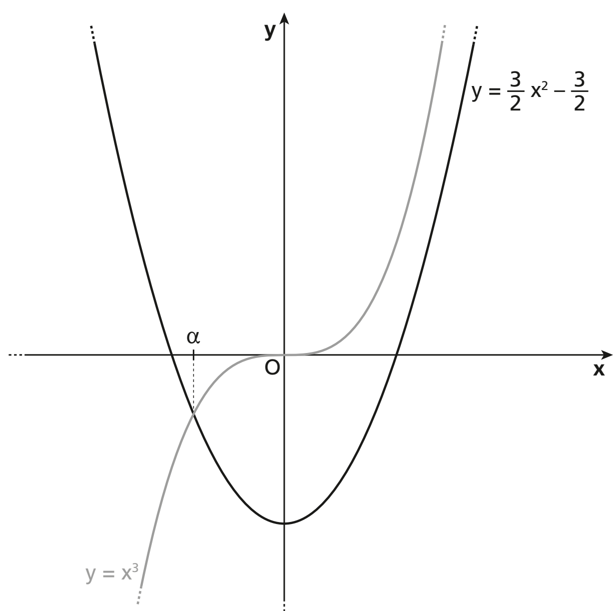
$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 3}{x^3} \end{cases}$$

che conduce all'equazione $2x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ le cui soluzioni non sono determinabili in maniera esatta in modo elementare.

La richiesta è dimostrare che esiste un solo zero di segno negativo, per cui consideriamo la funzione polinomiale $y = 2x^3 - 3x^2 + 3$, che è continua e derivabile su $\mathbb{R}$.

Poiché $\lim_{x \to \pm\infty} (2x^3 - 3x^2 + 3) = \pm\infty$, tale funzione polinomiale ammette almeno uno zero.

Le ascisse dei punti d'intersezione dei grafici delle funzioni $y = x^3$ e $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$ rappresentano gli zeri di $2x^2 - 3x^2 + 3$.



■ **Figura 8**

Dal grafico notiamo che lo zero $x = \alpha$ è unico e negativo. Notiamo inoltre che $2x^3 - 3x^2 + 3 > 0$ se $x > \alpha$.

Per determinare gli asintoti calcoliamo i limiti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_3(x) = \lim_{x \to \pm\infty}\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3}\right) = 2,$$

da cui deduciamo che la retta $y = 2$ è un asintoto orizzontale e non ci sono asintoti obliqui.
Inoltre:

$$\lim_{x \to 0^+} f_3(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3}\right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} f_3(x) = \lim_{x \to 0^-}\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3}\right) = -\infty,$$

da cui ricaviamo che la retta $x = 0$ è un asintoto verticale. Questi risultati sono in accordo con quanto trovato in precedenza per n dispari.
La funzione ha segno positivo per $x > 0$ e per $x < \alpha$ mentre è negativa per $\alpha < x < 0$.
La derivata prima della funzione per $n = 3$ vale:

$$f_3'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{9}{x^4} = \frac{3(x^2 - 3)}{x^4}.$$

Come già ottenuto, vi è un punto di minimo relativo di ascissa $x = \sqrt{3}$ e un punto di massimo relativo di ascissa $x = -\sqrt{3}$ e le ordinate valgono rispettivamente:

$$m\left(\sqrt{3}; 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \quad \text{e} \quad M\left(-\sqrt{3}; 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right).$$

La derivata seconda della funzione per $n = 3$ vale:

$$f_3''(x) = -\frac{6}{x^3} + \frac{36}{x^5} = \frac{6(6 - x^2)}{x^5}.$$

Come già previsto, vi sono due punti di flesso di ascisse $x = \pm\sqrt{6}$ e le ordinate valgono rispettivamente:

$$F_1\left(\sqrt{6}; 2 - \frac{5}{12}\sqrt{6}\right) \quad \text{e} \quad F_2\left(-\sqrt{6}; 2 + \frac{5}{12}\sqrt{6}\right).$$

Tracciamo ora il grafico di $y = f_3(x)$.

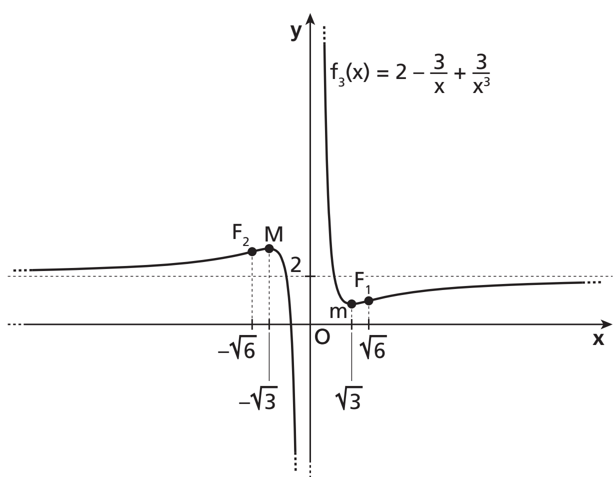


Figura 9

L'equazione parametrica $f_3(x)=k$ può essere discussa utilizzando il precedente grafico e tenendo conto che equivale al sistema: $\begin{cases} y=f_3(x) \\ y=k \end{cases}$. Si ottiene:

- una sola soluzione negativa se $k<2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$;
- una soluzione negativa e due positive coincidenti se $k=2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$;
- una soluzione negativa e due positive e distinte se $2-\frac{2}{3}\sqrt{3}<k<2$;
- una soluzione positiva e una negativa se $k=2$;
- due soluzioni negative distinte e una positiva se $2<k<2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$;
- due soluzioni negative coincidenti e una positiva se $k=2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$;
- una sola soluzione positiva se $k>2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

c. La disuguaglianza $f_n(x)>g(x)$ equivale a

$$2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^n}>2-\frac{3}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{3}{x^n}>0$$

che è verificata $\forall x>0$ sia che n sia pari sia che n sia dispari.

Calcoliamo l'integrale e il suo limite:

$$I(t)=\int_1^t\left(2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^n}-2+\frac{3}{x}\right)dx=\int_1^t\frac{3}{x^n}\,dx=\left[\frac{3}{(1-n)x^{n-1}}\right]_1^t=\frac{3}{(1-n)t^{n-1}}-\frac{3}{1-n},$$

$$\lim_{t\to+\infty}I(t)=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{3}{(1-n)t^{n-1}}-\frac{3}{1-n}\right]=\frac{3}{n-1}.$$

Tale valore rappresenta quello dell'area finita della regione di piano illimitata compresa tra i grafici delle funzioni $y=f_n(x)$ e $y=g(x)$ nell'intervallo $x\geq 1$.

d. Il limite proposto equivale a:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^n}-2}{2-\frac{3}{x}-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^{n-1}}\right)=1$$

che è indipendente da n perché per ogni $n>1$ si ha $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{n-1}}=0$.

PROBLEMA 2

a. Consideriamo la famiglia di funzioni $f_a(x)=\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})$ nella variabile x e di parametro a reale positivo. Poiché la funzione esponenziale è definita per ogni valore reale, il dominio delle funzioni è $\mathbb{R}$. Inoltre la funzione è dispari in quanto il dominio è simmetrico rispetto all'origine e

$$f_a(-x)=\frac{1}{2}(e^{a(-x)}-e^{-a(-x)})=\frac{1}{2}(e^{-ax}-e^{ax})=-\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})=-f_a(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

La funzione interseca gli assi cartesiani in (0; 0) e poiché a è positivo abbiamo che:

$$f(x)>0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})>0 \quad \rightarrow \quad e^{ax}>e^{-ax} \quad \rightarrow \quad ax>-ax \quad \rightarrow \quad 2ax>0 \quad \rightarrow \quad x>0.$$

La funzione è continua in $\mathbb{R}$, quindi il grafico di $f_a(x)$ non presenta asintoti verticali e se calcoliamo i limiti agli estremi del dominio abbiamo che

$$\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})\right] = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f_a(x) = -\infty \text{ per simmetria;}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})}{x} = +\infty \text{ per gerarchia degli infiniti e } \lim_{x \to -\infty} \frac{f_a(x)}{x} = -\infty \text{ per simmetria,}$$

quindi possiamo concludere che non esistono asintoti orizzontali o obliqui.

Procediamo calcolando la derivata prima della funzione per determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremi relativi:

$$f_a'(x) = \frac{1}{2}(ae^{ax} - (-a)e^{-ax}) = \frac{1}{2}a(e^{ax} + e^{-ax}).$$

Possiamo osservare che $f_a'(x) > 0$ per ogni valore del dominio perché somma di quantità sempre positive, per cui la funzione è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e non presenta punti stazionari.

Calcoliamo ora la derivata seconda della funzione per determinare gli eventuali flessi:

$$f_a''(x) = \frac{1}{2}a(ae^{ax} + (-a)e^{-ax}) = \frac{1}{2}a^2(e^{ax} - e^{-ax}).$$

Il coefficiente $\frac{1}{2}a^2$ è sempre positivo, quindi $f_a''(x) \geq 0$ per $x \geq 0$.

Dallo studio del quadro dei segni della derivata seconda possiamo dedurre che la funzione ha un punto di flesso obliquo in (0; 0), concavità rivolta verso l'alto per valori positivi del dominio e rivolta verso il basso per quelli negativi.

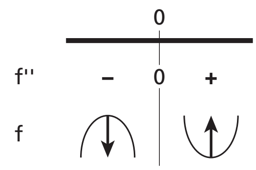


Figura 10

In sintesi, la famiglia di funzioni $f_a(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, dispari, monotòna strettamente crescente su tutto il dominio, ha punto fisso nel flesso obliquo $O(0; 0)$ ed è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$.

Tracciamo il grafico γ_f con le informazioni ricavate per alcuni valori di a.

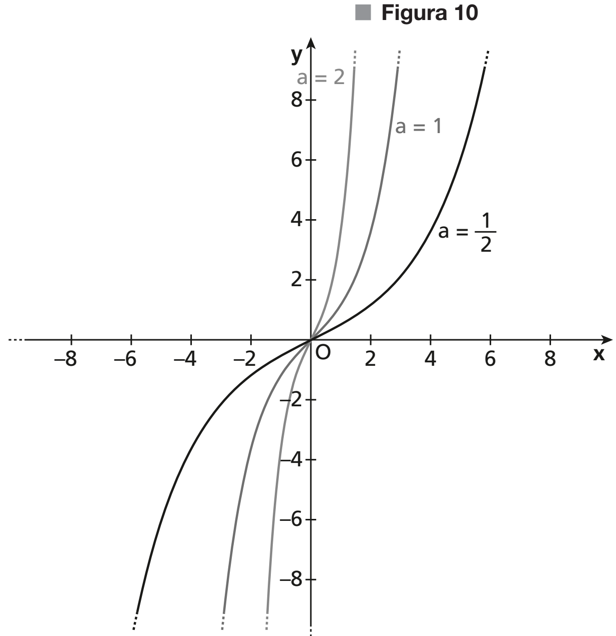


Figura 11

Consideriamo ora la famiglia di funzioni $g_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})$ nella variabile x e di parametro a reale positivo. Procediamo in modo analogo allo svolgimento precedente. Poiché la funzione esponenziale è definita per ogni valore reale, il dominio delle funzioni è $\mathbb{R}$. Inoltre la funzione è pari poiché il dominio è simmetrico rispetto all'origine e vale:

$$g_a(-x) = \frac{1}{2}(e^{a(-x)} + e^{-a(-x)}) = \frac{1}{2}(e^{-ax} + e^{ax}) = g_a(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

La funzione interseca l'asse y in (0; 1) e non interseca l'asse x, mentre è positiva per ogni valore del dominio perché somma di quantità positive. La funzione è continua in $\mathbb{R}$, quindi il grafico di $g_a(x)$ non presenta asintoti verticali e se calcoliamo i limiti agli estremi del dominio abbiamo che per a positivo

$$\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})\right] = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} g_a(x) = +\infty \text{ per simmetria;}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})}{x} = +\infty \text{ per gerarchia degli infiniti e } \lim_{x \to -\infty} \frac{f_a(x)}{x} = +\infty \text{ per simmetria,}$$

per cui possiamo dedurre che non esistono asintoti orizzontali o obliqui.

Studiamo ora gli intervalli di monotonia della funzione mediante il segno della derivata prima:

$$g_a'(x) = \frac{1}{2}(ae^{ax} + (-a)e^{-ax}) = \frac{1}{2}a(e^{ax} - e^{-ax}),$$

come già verificato nello studio del segno di $f_a(x)$, $g_a'(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ perché il coefficiente $\frac{1}{2}a$ è sempre positivo per valori positivi di a.

La funzione $g_a(x)$ ha un punto di minimo relativo in $x = 0$, è crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$. In particolare, poiché la funzione cresce a destra e decresce a sinistra del punto di minimo (0; 1), esso è anche minimo assoluto per la funzione.

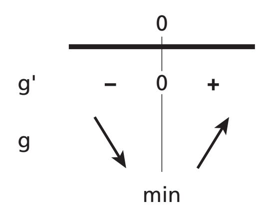


Figura 12

Determiniamo gli eventuali punti di flesso studiando il segno della derivata seconda:

$$g_a''(x) = \frac{1}{2}a(ae^{ax} - (-a)e^{-ax}) = \frac{1}{2}a^2(e^{ax} + e^{-ax}).$$

Poiché $g_a''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ con a positivo, la funzione non ha flessi e ha sempre la concavità rivolta verso l'alto.

In sintesi, la famiglia di funzioni $g_a(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, pari, crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$, ha minimo assoluto (0; 1) ed è positiva su tutto il dominio.

Tracciamo il grafico γ_g per alcuni valori di a con le informazioni ricavate.

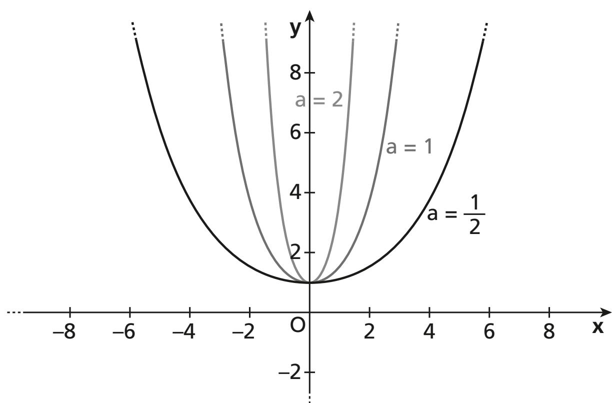


Figura 13

b. Tracciamo nel piano cartesiano una generica retta $x = k$, con k reale positivo, che intersechi le due funzioni γ_f e γ_g nel primo quadrante e scriviamo le coordinate dei punti P e Q e delle rispettive proiezioni P' e Q' sull'asse delle ordinate in funzione di $k > 0$:

$$P\left(k; \frac{1}{2}(e^{ak} - e^{-ak})\right), \qquad P'\left(0; \frac{1}{2}(e^{ak} - e^{-ak})\right),$$

$$Q\left(k; \frac{1}{2}(e^{ak} + e^{-ak})\right), \qquad Q'\left(0; \frac{1}{2}(e^{ak} + e^{-ak})\right).$$

Per calcolare l'area del rettangolo $P'PQQ'$, determiniamo le lunghezze dei segmenti $P'P$ e PQ considerando le limitazioni geometriche imposte:

$$\overline{P'P} = \left| x_p - x_{p'} \right| = \left| k - 0 \right| = k;$$

$$\overline{PQ} = \left| y_Q - y_P \right| =$$

$$\left| \frac{1}{2}(\cancel{e^{ak}} + e^{-ak} - \cancel{e^{ak}} + e^{-ak}) \right| = e^{-ak}.$$

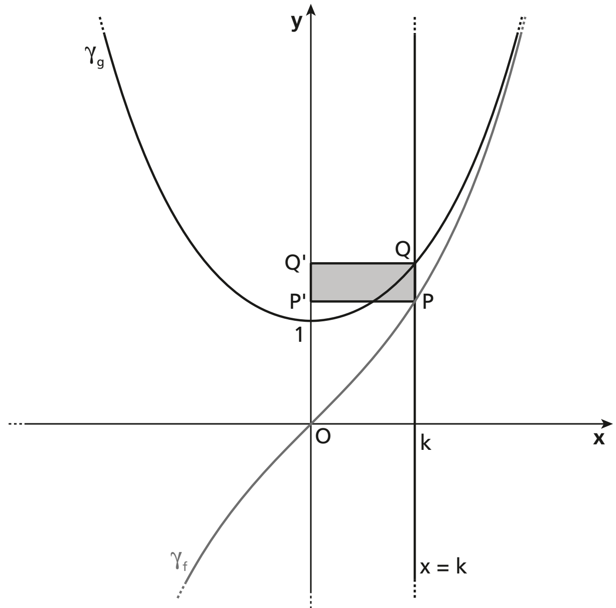


Figura 14

La funzione obiettivo che ci permette di calcolare l'area del rettangolo in funzione di k è:

$$A(k) = \overline{P'P} \cdot \overline{PQ} = ke^{-ak} \text{ con } k > 0.$$

Determiniamo per quale valore di k il rettangolo $P'PQQ'$ abbia area massima studiando il segno della derivata prima della funzione:

$$A'(k) = 1 \cdot e^{-ak} + k \cdot (-a)e^{-ak} = e^{-ak}(1 - ak);$$

$$A'(k) \geq 0 \quad \rightarrow \quad e^{-ak}(1 - ak) \geq 0 \quad \rightarrow \quad 1 - ak \geq 0 \quad \rightarrow \quad 0 < k \leq \frac{1}{a}.$$

Rappresentiamo i valori trovati in un quadro dei segni e osserviamo che la funzione ha un punto di massimo relativo per $k = \frac{1}{a}$, quindi poniamo la condizione che $A\left(\frac{1}{a}\right) = e^{-1}$:

$$A\left(\frac{1}{a}\right) = e^{-1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}e^{-\cancel{a}\frac{1}{\cancel{a}}} = e^{-1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a} = 1 \quad \rightarrow \quad a = 1.$$

La massima area del rettangolo $P'PQQ'$ vale e^{-1} per $a = 1$.

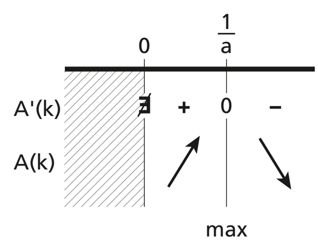


Figura 15

c. La funzione $g^2(x) - f^2(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$:

$$g^2(x) - f^2(x) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}[(\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}}) - (\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{-2x}})] =$$

$$\frac{1}{4}(2 + 2) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Risolviamo la disequazione proposta:

$$50 \leq g(x) - f(x) \leq 100 \quad \rightarrow \quad 50 \leq \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - (e^x - e^{-x})) \leq 100 \quad \rightarrow \quad 50 \leq e^{-x} \leq 100 \quad \rightarrow$$

$$\ln 50 \leq -x \leq \ln 100$$

moltiplicando per -1 e cambiando il verso alla disequazione otteniamo

$$-\ln 100 \leq x \leq -\ln 50 \quad \to \quad -4{,}605 \leq x \leq -3{,}912 \quad \to \quad x = -4 \text{ poiché } x \in \mathbb{Z}.$$

Per le caratteristiche studiate al punto a), possiamo affermare che la funzione $f(x)$ è invertibile perché la sua derivata prima è strettamente positiva in $\mathbb{R}$, quindi è monotòna crescente mentre la funzione $g(x)$ non è invertibile perché non può essere iniettiva in quanto funzione pari.

Ricaviamo l'espressione analitica della funzione inversa:

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \to \quad 2y = e^x - \frac{1}{e^x} \quad \to \quad 2ye^x = e^{2x} - 1 \quad \to \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,$$

applicando la formula risolutiva ridotta delle equazioni di secondo grado abbiamo:

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

La quantità $y - \sqrt{y^2+1}$ è negativa poiché $\sqrt{y^2+1} > |y|$, $\forall y \in \mathbb{R}$, quindi l'unica soluzione accettabile è

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \quad \to \quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Scambiamo le variabili x e y e otteniamo la funzione inversa $y = f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

d. La parabola richiesta ha vertice in (0; 1) e asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, perciò possiamo scrivere la sua equazione nella forma $y - 1 = a(x-0)^2$, da cui $y = ax^2 + 1$.

Poiché la retta tangente alla parabola in $x = 1$ è parallela alla retta di equazione $y = -2x$, possiamo porre la condizione che la derivata prima della parabola $y' = 2ax$ calcolata in $x = 1$ debba valere -2:

$$2a = -2 \quad \to \quad a = -1.$$

La parabola ha dunque equazione $y = -x^2 + 1$. Rappresentiamola nel piano cartesiano.

La parabola ha vertice $V(0; 1)$, rivolge la concavità verso il basso e interseca l'asse delle ascisse in $A(-1; 0)$ e in $B(1; 0)$.

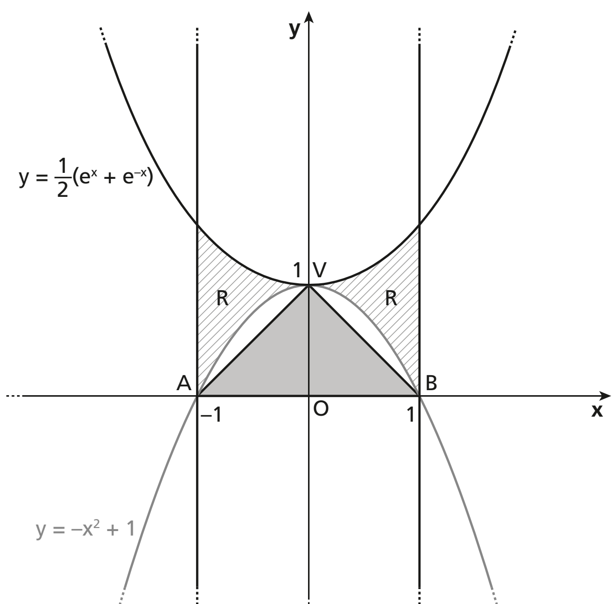


Figura 16

Poiché la regione R è simmetrica rispetto all'asse delle y, possiamo calcolare:

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-(-x^2+1)\right]dx = 2\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})+x^2-1\right]dx = 2\left[\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^1 =$$

$$e-\frac{1}{e}+\frac{2}{3}-2-(1-1)\simeq 1{,}017.$$

Il triangolo isoscele AVB inscritto nel segmento parabolico ha vertice in V e base AB. Calcoliamo la sua area:

$$\text{Area}(ABV)=\frac{\overline{OV}\cdot\overline{AB}}{2}=\frac{|1-0|\cdot|1-(-1)|}{2}=1,$$

che è una approssimazione alla prima cifra decimale dell'area della regione R.

QUESTIONARIO

1 Detta x l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{A}C$, risulta che l'angolo $A\widehat{B}C$ ha ampiezza $2x$ mentre l'angolo $A\widehat{C}B$ ha ampiezza $\frac{x}{3}$. Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, deve risultare che:

$$x+2x+\frac{x}{3}=180° \quad \to \quad x=54°.$$

Quindi si ottengono le seguenti ampiezze degli angoli interni del triangolo ABC:

$$B\widehat{A}C=54°,\ A\widehat{B}C=108° \text{ e } A\widehat{C}B=18°.$$

Tracciato ora il cerchio inscritto nel triangolo ABC di centro O, i suoi raggi OA', OB' e OC' nei punti di tangenza sono perpendicolari rispettivamente ai lati BC, AC e AB per la proprietà delle rette tangenti a un cerchio.

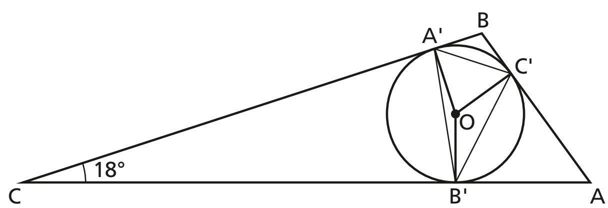


Figura 17

Quindi nel quadrilatero $OB'AC'$ gli angoli $B'\widehat{A}C'$ e $B'\widehat{O}C'$ sono supplementari poiché gli altri due sono retti e quindi $B'\widehat{O}C'=180°-B'\widehat{A}C'=180°-54°=126°$.

L'angolo $B'\widehat{A'}C'$ è la metà di $B'\widehat{O}C'$ poiché è un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco $B'C'$ ed è la metà del corrispondente angolo al centro $B'\widehat{O}C'$, per cui $B'\widehat{A'}C'=126°:2=63°$.

Ragionando in maniera analoga sui quadrilateri $OA'BC'$ e $OA'CB'$, si ottiene che:

$$A'\widehat{O}C'=180°-108°=72° \quad \to \quad A'\widehat{B'}C'=A'\widehat{O}C':2=36°$$

e che

$$A'\widehat{O}B'=180°-18°=162° \quad \to \quad A'\widehat{C'}B'=A'\widehat{O}B':2=81°.$$

2 Tutti i possibili gruppi da 5 studenti che possono essere formati nella classe sono $C_{18,5}=8568$.

Con i restanti 13 studenti della classe possono invece essere formati $C_{13,6}=1716$ gruppi da 6 studenti. Infine vi è un solo gruppo $C_{7,7}=1$ da 7 studenti che si può formare con i restanti 7 studenti.

Tutti i casi possibili della probabilità richiesta sono il prodotto delle precedenti combinazioni semplici:

$C_{18,5}\cdot C_{13,6}\cdot C_{7,7}$.

Per calcolare i casi favorevoli possiamo inizialmente considerare solo i casi in cui le due compagne Alice e Barbara facciano parte di uno stesso gruppo a cui invece non deve appartenere Chiara.

I casi in cui Alice e Barbara fanno parte del gruppo da 5 studenti e Chiara no sono in totale:

$C_{15,3} \cdot C_{13,6} \cdot C_{7,7}$

poiché Alice e Barbara devono far parte del gruppo da 5 e in aggiunta si scelgono altri 3 dei 15 studenti rimasti che non siano Chiara, mentre per i gruppi formati da 6 e da 7 studenti si procede come fatto prima coi 13 studenti restanti.

I casi in cui Alice e Barbara fanno parte del gruppo da 6 studenti e Chiara no sono in totale:

$C_{15,4} \cdot C_{12,5} \cdot C_{7,7}$

poiché Alice e Barbara devono far parte del gruppo da 6 e in aggiunta si scelgono altri 4 dei 15 studenti rimasti che non siano Chiara, mentre per i gruppi formati da 5 e da 7 studenti si procede come fatto prima coi 12 studenti restanti.

Infine i casi in cui Alice e Barbara fanno parte del gruppo da 7 studenti e Chiara no sono in totale:

$C_{15,5} \cdot C_{11,6} \cdot C_{5,5}$

poiché Alice e Barbara devono far parte del gruppo da 7 e in aggiunta si scelgono altri 5 dei 15 studenti rimasti che non siano Chiara, mentre per i gruppi formati da 6 e da 5 studenti si procede come prima con gli 11 studenti restanti.

Per ottenere tutti i casi possibili, si tratterà di sommare i tre casi calcolati e moltiplicarli per 3 in quanto le ragazze che possono stare nel gruppo assieme possono essere tre coppie: Alice e Barbara, oppure Alice e Chiara oppure Barbara e Chiara.

Pertanto la probabilità richiesta vale:

$$p = \frac{3 \cdot (C_{15,3} \cdot C_{13,6} \cdot C_{7,7} + C_{15,4} \cdot C_{12,5} \cdot C_{7,7} + C_{15,5} \cdot C_{11,6} \cdot C_{5,5})}{C_{18,5} \cdot C_{13,6} \cdot C_{7,7}} =$$

$$\frac{3 \cdot (455 \cdot 1716 \cdot 1 + 1365 \cdot 792 \cdot 1 + 3003 \cdot 462 \cdot 1)}{8568 \cdot 1716 \cdot 1} = \frac{541}{816} \simeq 66,3\%.$$

3 La retta r si può scrivere come intersezione di due piani eliminando il parametro t: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 4y - z + 1 = 0 \end{cases}$ e la retta s si può scrivere in forma parametrica come

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = h \\ z = -3 + 2h \end{cases}, \text{con } h \in \mathbb{R}$$

e il suo vettore di direzione risulta $\vec{v}_s = (0; 1; 2)$.

Il piano π richiesto appartiene al fascio di piani generato dai piani di equazioni:

$x - y - 1 = 0$ e $4y - z + 1 = 0$;

il piano α di equazione $4y - z + 1 = 0$ non può essere π perché non è parallelo a s in quanto il prodotto scalare tra i vettori $\vec{v}_s = (0; 1; 2)$ e $\vec{n}_\alpha = (0; 4; -1)$ vale 2 e non è nullo; l'equazione del fascio di piani che hanno come retta in comune r può essere scritta come:

$$x - y - 1 + k(4y - z + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x + (4k - 1)y - kz + k - 1 = 0 \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

Tra tali piani, per determinare l'equazione di π, occorre imporre la condizione di parallelismo rispetto alla retta s calcolando il prodotto scalare tra $\vec{v}_s = (0; 1; 2)$ e il vettore normale del piano del fascio

$\vec{n}_f = (1; 4k; -1; -k)$ e ponendolo uguale a zero:

$$\vec{v}_s \cdot \vec{n}_f = 0 + 4k - 1 - 2k = 2k - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{2}.$$

Perciò il piano π è quello del fascio corrispondente al valore $k = \frac{1}{2}$ e ha equazione cartesiana:

$$x + y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x + 2y - z - 1 = 0.$$

4 Detta $x > 0$ la lunghezza del lato della base quadrata del parallelepipedo e $\sqrt{2}\,x$ la lunghezza della diagonale di tale base quadrata, utilizzando il teorema di Pitagora tridimensionale si può ricavare l'altezza $h(x)$ del parallelepipedo in funzione di x:

$$h(x) = \sqrt{d^2 - (\sqrt{2}\,x)^2} = \sqrt{d^2 - 2x^2},$$

che esiste ed è non nulla se $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}d$.

Il volume del parallelepipedo risulta quindi $V(x) = x^2\sqrt{d^2 - 2x^2}$.

Per determinarne il valore massimo calcoliamo la sua derivata prima:

$$V'(x) = 2x\sqrt{d^2 - 2x^2} + x^2\frac{-4x}{2\sqrt{d^2 - 2x^2}} = \frac{2x(d^2 - 3x^2)}{\sqrt{d^2 - 2x^2}}.$$

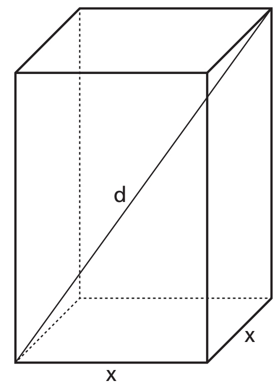


Figura 18

Studiando il segno della derivata prima, all'interno delle limitazioni geometriche ricavate, risulta che il suo segno dipende dal solo fattore $d^2 - 3x^2$ che è positivo per $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}d$, si annulla per $x = \frac{\sqrt{3}}{3}d$ ed è negativo per $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}d$.

Quindi si ottiene il volume massimo in corrispondenza del valore $x = \frac{\sqrt{3}}{3}d$ che è la situazione geometrica a cui corrisponde anche l'altezza $h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}d\right) = \sqrt{d^2 - \frac{2}{3}d^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}d = x$ per cui il parallelepipedo diventa un cubo.

5 Data la derivata seconda $f''(x) = -10x^3 + 12x$ della funzione f, ricaviamo l'espressione analitica di f integrando le derivate successive:

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int(-10x^3 + 12x)dx = -\frac{5}{2}x^4 + 6x^2 + c_1,$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int\left(-\frac{5}{2}x^4 + 6x^2 + c_1\right)dx = -\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 + c_1x + c_2.$$

La funzione f è una funzione razionale intera definita su tutto $\mathbb{R}$. Affinché f sia dispari, tutti i suoi termini costituiti da monomi nella variabile x devono avere solo esponente dispari, perciò $c_2 = 0$.

Una funzione presenta in $x = x_0$ un flesso a tangente orizzontale se x_0 annulla sia la derivata prima che la derivata seconda della funzione, cioè se $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0$.

Determiniamo i possibili valori di x_0 cercando i valori che annullano la derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x(-5x^2 + 6) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \vee x = \pm\frac{\sqrt{30}}{5}$$

Se $x = 0$ è punto di flesso a tangente orizzontale per la funzione, dobbiamo porre la condizione

$$f'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0.$$

Sostituendo i valori ottenuti per c_1 e c_2, otteniamo $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + 2x^3$ e $f'(x) = -\frac{5}{2}x^4 + 6x^2$.

Poiché $f'\left(+\frac{\sqrt{30}}{5}\right)=f'\left(-\frac{\sqrt{30}}{5}\right)=-\frac{5}{2}\cdot\frac{36}{25}+6\cdot\frac{6}{5}=+\frac{18}{5}\neq 0$, osserviamo che $x=0$ è l'unico punto di flesso a tangente orizzontale per la funzione se $c_1=0$.

Invece $x=+\frac{\sqrt{30}}{5}$ fosse punto di flesso a tangente orizzontale per la funzione, che è dispari, allora anche $x=-\frac{\sqrt{30}}{5}$ sarebbe punto di flesso orizzontale, mentre nel testo si richiede che la funzione abbia un solo punto di flesso a tangente orizzontale.

Quindi la funzione richiesta è $f(x)=-\frac{1}{2}x^5+2x^3$.

6 La funzione integrale $F(x)=\int_{-2}^{x} f(t)dt,\ x\in[-2;5]$ è la funzione che ci permette di calcolare l'area della regione compresa fra il grafico della funzione f e l'asse x partendo da $x=-2$ e sommando algebricamente con segno positivo le aree degli intervalli in cui $f>0$, con segno negativo quelle in cui $f<0$.

- $F(-2)=\int_{-2}^{-2} f(t)dt=0$ per proprietà dell'integrale definito;
- $F(2)=\int_{-2}^{2} f(t)dt=\frac{1}{2}\pi 2^2=2\pi$ perché è l'area del semicerchio di raggio 2;

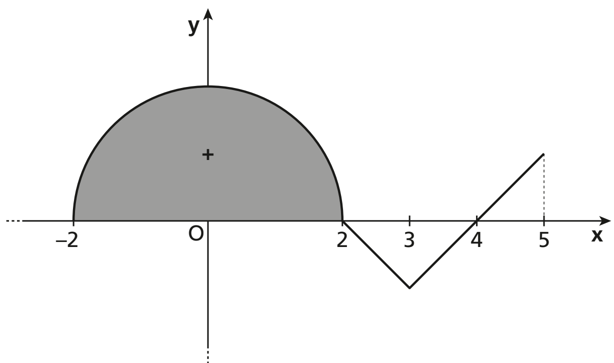


Figura 19

- $F(3)=\int_{-2}^{3} f(t)dt=2\pi-\frac{1}{2}$ perché è la somma algebrica dell'area del semicerchio di raggio 2 con segno positivo e dell'area del triangolo rettangolo isoscele di cateti di lunghezza 1 con segno negativo;

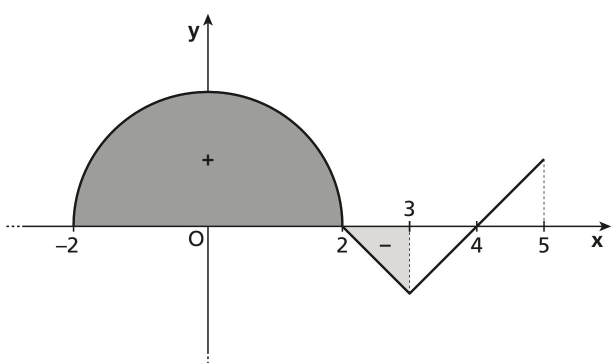
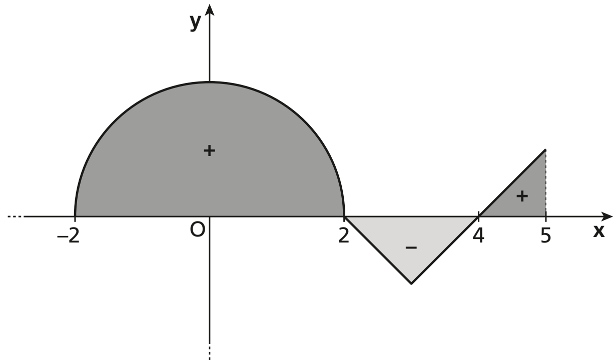


Figura 20

- $F(5)=\int_{-2}^{5} f(t)dt = 2\pi - 1 + \frac{1}{2} = 2\pi - \frac{1}{2}$ perché è la somma algebrica dell'area del semicerchio di raggio 2 con segno positivo, dell'area del triangolo isoscele di base 2 e altezza 1 con segno negativo e dell'area del triangolo rettangolo isoscele di cateti di lunghezza 1 con segno positivo.



■ **Figura 21**

7 La funzione $f(x)=\frac{x|x+1|}{x^3-x}$ è una funzione razionale fratta, quindi la condizione d'esistenza da porre per trovare il dominio è che il denominatore sia diverso da zero:

$$x^3 - x \neq 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2-1)\neq 0 \quad \rightarrow \quad x\neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1.$$

Il dominio della funzione è quindi $D=\mathbb{R}-\{-1, 0, 1\}$.

Analizziamo ogni singolo caso per classificare il tipo di singolarità:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}|x+1|}{\cancel{x}(x^2-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{|x+1|}{x^2-1} = \frac{1}{-1} = -1,$$

perciò $x=0$ è una *singolarità eliminabile*, perché il limite destro e sinistro della funzione in un intorno di 0 sono finiti e uguali ma il punto non appartiene al dominio;

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{x}|x+1|}{\cancel{x}(x^2-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{x}|x+1|}{\cancel{x}(x^2-1)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x-1)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1} = -\infty,$$

quindi $x=1$ è una singolarità di seconda specie (o asintoto) perché almeno uno dei due limiti in un intorno destro o sinistro del punto è infinito;

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{\cancel{x}|x+1|}{\cancel{x}(x^2-1)} = \lim_{x\to -1^+}\frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+}\frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x-1)} = \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{\cancel{x}|x+1|}{\cancel{x}(x^2-1)} = \lim_{x\to -1^-}\frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^-}\frac{-\cancel{(x+1)}}{(\cancel{x+1})(x-1)} = \lim_{x\to -1^-}\frac{-1}{x-1} = +\frac{1}{2};$$

perciò $x=-1$ è una singolarità di prima specie (o salto), perché il limite destro e sinistro della funzione in un intorno di 0 sono finiti e diversi. Il salto della funzione in questo punto è 1.

8 Consideriamo le seguenti affermazioni su $y = f(x)$:

A: "$f(x)$ è derivabile per $x = x_0$"

B: "$f(x)$ è continua per $x = x_0$"

L'affermazione $A \Rightarrow B$ stabilisce che "se $f(x)$ è derivabile per $x = x_0$, allora $f(x)$ è continua per $x = x_0$" ed è sempre vera perché costituisce il teorema sul legame fra continuità e derivabilità della funzione in un punto. Dal teorema possiamo dedurre che la condizione di derivabilità in un punto è più forte di quella della continuità.

L'affermazione $B \Rightarrow A$ implica che "se $f(x)$ è continua per $x = x_0$, allora $f(x)$ è derivabile per $x = x_0$" non costituisce un teorema e non è sempre vera, infatti la continuità in un punto non è condizione sufficiente per la derivabilità. Come controesempio, possiamo osservare che se consideriamo $f(x) = |x|$, la funzione è continua in $x = 0$ ma non è derivabile in questo punto.

L'affermazione $A \Leftrightarrow B$ non è vera perché una delle due implicazioni ($B \Rightarrow A$) non è sempre vera.